

Chapitre 1 | Systèmes d'équations linéaires (SEL)

Cette séance: • déf. de SEL, l'écrire de façon matricielle

• types de SEL $\rightarrow$ incompatible

compatible $\rightarrow$ déterminé
 $\rightarrow$ indéterminé

• notation de SEL équivalents et les opérations élémentaires sur les lignes.

§ 1.2 + 1.3 (début) Généralités

Déf 1.2 | Un SEL en les variables $x_1, \dots, x_n$ est une famille d'équations

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow \\ \vdots \\ L_m \rightarrow \end{array} (*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$
coefficient second membre

On dit que le SEL est de taille $m \times n$.

$\uparrow$ $\uparrow$
lignes # variables

Déf 1.4 | Pour (*), une solution est un n -uplet $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$
tel que $\begin{cases} a_{1,1}s_1 + \dots + a_{1,n}s_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + \dots + a_{m,n}s_n = b_m \end{cases}$ sont vérifiées.

Déf. 1.4 (suite) On note $S_{(*)}$ l'ensemble de toutes les solutions de $(*)$.

$(*)$ $\begin{cases} \rightarrow \text{incompatible si } S_{(*)} = \emptyset \\ \rightarrow \text{compatible si } S_{(*)} \neq \emptyset \end{cases}$ $\begin{cases} \rightarrow \text{déterminé si } \#(S_{(*)}) = 1 \\ \rightarrow \text{indéterminé si } \#(S_{(*)}) > 1 \end{cases}$

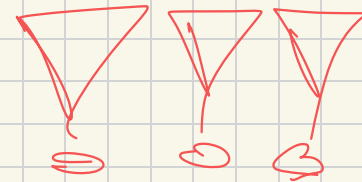
Exemple 1.5 $(*) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \leadsto \text{incompatible ?}$

Exemple 1.6 $(*) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \leadsto x_1 = 1 - x_2$

Toute solution de $(*)$ est $(1 - x_2, x_2)$ avec $x_2 \in \mathbb{R}$ q.c.g.

i.e. $S_{(*)} = \{ (1-s, s) : s \in \mathbb{R} \} \ni \underbrace{(1, 0)}_{s=0}, \underbrace{(0, 1)}_{s=1}, \underbrace{(-1, 2)}_{s=2}, \dots$

On va écrire $\in, \ni, \psi, \cap, \dots$



Exemple A (*) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = -3, \end{cases}$

$\rightarrow$ SEL compatible déterminé
et $S(x) = \{(1, 2)\}$

On fait $L_1 - L_2$:

$$2x_1 = (-1) - (-3) = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

D'après L_2

$$1 + 2x_2 = -3 \Rightarrow 2x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -2 \quad \square$$

Thm 1.7 Soit (*) un SEL. Si $\#(S(x)) > 1$, alors $S(x)$ est infini.
"quantité d'éléments de $S(x)$ est > 1 "

(Preuve) Voir polycopié. $\square$

Déf 1.12 É.d.un SEL (*), on définit

(Abrégée)

(OEL.I) On échange les lignes L_i et L_j

(OEL.II) On multiplie L_i par $\lambda \neq 0$

(OEL.III) On remplace L_i par $L_i + \lambda L_j$ avec $j \neq i, \lambda \in \mathbb{R}$

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

opérations élémentaires sur
les lignes (OEL)

On dit que deux SEL (*) et (*)' sont équivalents (selon les lignes) si l'on peut passer de (*) à (*)' à partir d'une suite finie d'OEL:

$$(*) \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_p} (*)'$$

Rq .A

Toutes OEL sont inversibles et les opérations inverses sont aussi des OEL:

$$(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = L_i \leftrightarrow L_j$$

$$(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$$

$$(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} = \quad ?? \quad (\text{exo})$$

Thm 1.14

Soient (*) et (*)' deux SEL équivalents.

$$\text{Alors } S(*) = S(*)'.$$

(Preuve) Exercice $\rightarrow$ montrer que $(\text{OEL.I}) - (\text{OEL.III})$ préservent l'ensemble de solutions $\square$

Exemple 1.15

$$(*) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 6x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ &\rightarrow \\ &L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{aligned} \begin{cases} \cancel{0x_1} - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ \cancel{0x_1} + 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{cases} x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ &\rightarrow \end{aligned} \begin{cases} x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \cancel{0x_2} - 3x_3 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Alors}} \begin{aligned} &x_3 = -\frac{7}{3} \xrightarrow{L_1} x_2 = -1 - \frac{7}{3} = -\frac{10}{3} \\ &\xrightarrow{L_2} x_1 = -2\left(-\frac{10}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{27}{3} \end{aligned}$$